Método do Primeiro Momento

Uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{P})$ é simplesmente uma função real $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Dado um número real $x \in \mathbb{R}$, denotamos por $\{X \geq x\}$ o evento $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq x\}$ e denotamos por $\mathbb{P}(X \geq x)$ a probabilidade de tal evento. Similarmente, definimos $\mathbb{P}(X \leq x)$, $\mathbb{P}(X > x)$, $\mathbb{P}(X < x)$ e $\mathbb{P}(X = x)$.

Def. Definimos a esperança ou média (ou ainda valor esperado ou primeiro momento) de X como

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$$

Se X é uma variável aleatória inteira ñ negativa, então podemos escrever a esperança de X como

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

Def. Dado um evento $A \subseteq \Omega$, definimos a variável indicadora do evento A como a variável aleatória $\mathbb{1}_A$ tal que para cada $\omega \in \Omega$, temos

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Prop. $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$

Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição de Bernoulli com parametros p se $\mathbb{P}(X = 1) = p$ e $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. Note que $\mathbb{E}[X] = p$. Em particular, variáveis indicadoras têm distribuição de Bernoulli com parâmetro $p = \mathbb{P}(A)$.

Proposição 5.3.3 Para quaisquer duas variáveis aleatórias X e Y e quaisquer números reais a e b, temos que

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$$

Def. Dizemos que $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ são variáveis aleatórias independentes se, para quaisquer $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, os eventos $\{X_i = x_i\}$ $(1 \leq i \leq n)$ são mutuamente independentes.

Prop. Se X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes, então

$$\mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[X_1]\,\mathbb{E}[X_2]$$

Def. Definimos uma <u>variável aleatória binomial</u> X de parâmetros n e p, denotado por $\mathbb{B}(n,p)$, como sendo

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

onde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis com distribuição de Bernoulli

<u>Observação</u>: Se $X = \mathbb{B}(n,p)$, então $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = pn$

Uma prova usando o <u>método do primeiro momento</u> consiste em calcular a esperança de uma variável aleatória adequada, concluindo então que com probabilidade positiva, deve existir um elemento do espaço amostral cuja variável é tão grande quanto sua média

Prop. 5.3.7 Seja X uma <u>variável aleatória</u>. Se $\mathbb{E}[X] \geq t$, então $\mathbb{P}(X \geq t) > 0$.

Teo. 5.3.8. Todo grafo G possui um subgrafo bipartido $H \subseteq G$ tal que

$$e(H) \geq \frac{e(G)}{2}.$$

Demonstração

- Considere um conj. aleatório $A \subseteq V(G)$ obtido escolhendo cada vértice $v \in V(G)$ de forma aleatória e independente com probabilidade $1/2$
- Seja $B = V(G) \setminus A$
- Considere o subgrafo bipartido $H = G[A,B]$ com conj. de arestas

$$E(H) = \{uv \in E(G) : u \in A \text{ e } v \in B\}$$

- Para cada aresta $uv \in E(G)$, considere a variável aleatória X_{uv} indicadora do evento $\{uv \in E(H)\}$

- Note que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{uv}] = \mathbb{P}(uv \in E(H)) &= \mathbb{P}(\{u \in A \text{ e } v \in B\} \cup \{u \in B \text{ e } v \in A\}) \\
&= \mathbb{P}(u \in A \text{ e } v \in B) + \mathbb{P}(u \in B \text{ e } v \in A) \\
&\quad - \mathbb{P}(\{u \in A \text{ e } v \in B\} \cap \{u \in B \text{ e } v \in A\}) \\
&= 1/4 + 1/4 = 1/2
\end{aligned}$$

- Note que $e(H) = \sum_{uv \in E(G)} X_{uv}$

- Assim, $\mathbb{E}[e(H)] = \mathbb{E}\left[\sum_{uv \in E(G)} X_{uv}\right] = \sum_{uv \in E(G)} \mathbb{E}[X_{uv}] = \sum_{uv \in E(G)} 1/2$

$$= \frac{1}{2} e(G)$$

- Pela Prop. 5.3.7, temos que $\mathbb{P}\left(e(H) \geq \frac{1}{2} e(G)\right) > 0$.

- Assim, existe $H \subseteq G$ bipartido tal que $e(H) \geq e(G)/2$ $\square$

Ex: Crie um torneio com 6 vértices e ao menos 23 caminhos Hamiltonianos

Teo 5.3.9 (Szele) Existe um torneio com n vértices contendo pelo menos $\frac{n!}{2^{n-1}}$ caminhos hamiltonianos.

Demonstração.

- Considere um torneio aleatório T com n vértices.
- Seja X o número de caminhos hamiltonianos em T.
- Para cada permutação $\sigma : [n] \to [n]$, seja X_σ a variável indicadora para o evento $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ ser um caminho hamiltoniano em T
- Note que $\mathbb{E}[X_\sigma] = 2^{-n+1}$

- Segue, então, que $X = \sum_\sigma X_\sigma$.
- Portanto

$$\mathbb{E}[X] = \sum_\sigma \mathbb{E}[X_\sigma] = \frac{n!}{2^{n-1}}$$

- Consequentemente, existe um torneio com n vértices contendo pelo menos $n!/2^{n-1}$ caminhos hamiltonianos $\square$

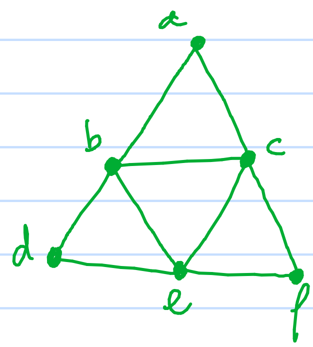
Teo. 5.3.11. Para todo grafo G com n vértices, temos que

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1 + d(v)}.$$

<u>Demonstração</u>

- Seja $\pi : V(G) \to [n]$ uma função bijetora escolhida uniformemente ao acaso dentre todas as $n!$ funções desse tipo.
- Podemos visualizar π como uma permutação dos vértices, onde $\pi(u) = i$ se o vértice u é o i-ésimo elemento na permutação.

Ex



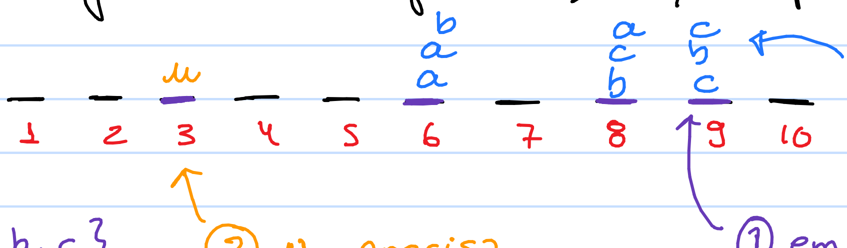
$$\pi = \begin{pmatrix} a & c & d & f & b & e \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- Note que existem $n!$ permutações o que implica na probabilidade de $1/n!$ de uma permutação específica ocorrer.

- Para cada $u \in V(G)$, defina o evento A_u de todos os vizinhos de u aparecerem depois de u na ordenação, i.e.,

$$A_u = \{\pi : \pi(u) < \pi(v) \text{ para todo } v \in N(u)\}$$

- Seja $N_u = N(u) \cup \{u\}$
- Note que há $\binom{n}{d(u)+1}$ configurações de posições em que podemos botar os elementos de N_u
- Dado um conjunto de contendo $d(u)+1$ posições em uma, existem $d(u)!$ formas de distribuir os elementos de N_u de forma a gerar uma permutação que pertença a A_u



③ $\exists\ d(u)!$ formas de posicionar os elementos restantes

$N(u) = \{a, b, c\}$

② u precisa vir antes dos vizinhos p/ essa permutação pertencer ao evento A_u

① em roxo temos $d(u)+1$ posições fixas

- Podemos completar o restante da permutação de $(n-(d(u)+1))!$ formas

- Assim $|A_u| = \binom{n}{d(u)+1} d(u)!\,(n-d(u)-1)!$

- Assim $\mathbb{P}(A_u) = \dfrac{|A_u|}{n!} = \dfrac{\binom{n}{d(u)+1} d(u)!\,(n-d(u)-1)!}{n!}$

$$= \frac{\cancel{n!}}{(d(u)+1)!\,\cancel{(n-(d(u)+1))!}} \cdot \frac{d(u)!\,\cancel{(n-(d(u)+1))!}}{\cancel{n!}}$$

$$= \frac{d(u)!}{(d(u)+1)!} = \frac{\cancel{d(u)!}}{(d(u)+1)\,\cancel{d(u)!}} = \frac{1}{d(u)+1}.$$

- Seja $A = \{u \in V(G) : \underbrace{\pi(u) \leq \pi(v)}_{A_u \text{ ocorreu}} \quad \forall v \in N(u)\}$

- Note que A é um conj. independente

  - Suponha, para uma contradição, que $u, v \in A$ e que $uv \in E(G)$.
  - Podemos assumir sem perda de generalidade que $\pi(u) < \pi(v)$.
  - Então v ñ deveria pertencer a A, pela definição de A.

- Note que $\alpha(G) \geq |A|$

- Seja X_u uma variável aleatória indicadora do evento A_u para todo $u \in V(G)$.

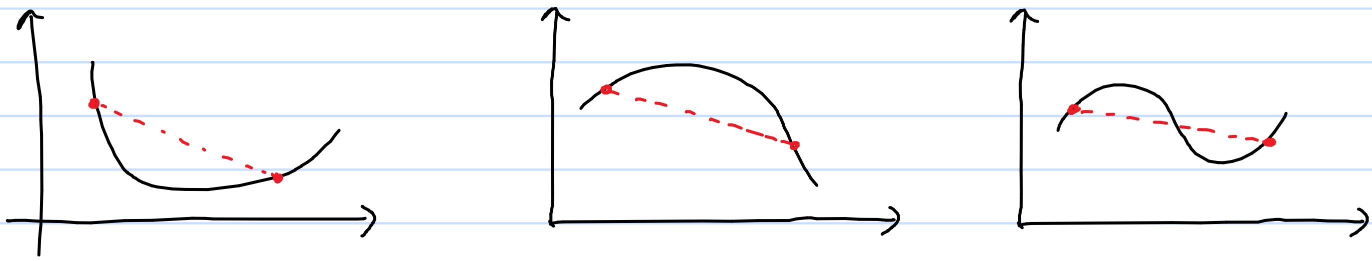
- Seja $X = \sum_{u \in V(G)} X_u$ e note que $|A| = X$

- $\mathbb{E}[|A|] = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{u \in V(G)} X_u\right] = \sum_{u \in V(G)} \mathbb{E}[X_u] = \sum_{u \in V(G)} \mathbb{P}(A_u)$

$$= \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{1+d(u)}$$

- Portanto, existe um conj. independente em G do tamanho afirmado $\square$

Dizemos que uma função real $f(x)$ é <u>convexa</u> em um intervalo I se o segmento de reta para quaisquer dois pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, onde $x_1, x_2 \in I$, está acima do gráfico da função entre esses dois pontos.



convexa

côncava

nem côncava nem convexa

Formalmente, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é <u>convexa</u> se

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

para qualquer $0 \leq \lambda \leq 1$.

Teo. Se $f''(x) \geq 0$ para todo x no intervalo I, então $f(x)$ é convexa no intervalo I.

Teo (Desigualdade de Jensen) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa e X uma variável aleatória finita tomando valores reais. Então

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X]).$$

Corolário (Desigualdade de Jensen) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa e sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Então,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

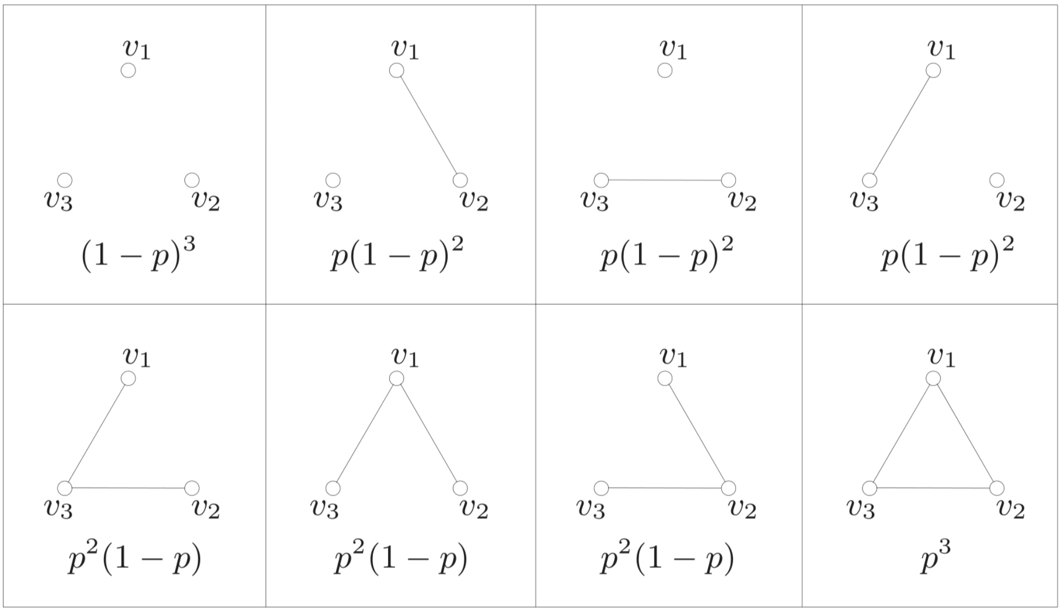
Sorteio de Grafos

Muitos dos problemas que podem ser resolvidos pelo Método Probabilístico consistem em tomar um grafo aleatório.

Def. Dado $n \in \mathbb{N}$ e $p \in [0,1]$, definimos $G(n,p)$ como o grafo aleatório com n vértices obtido ao adicionarmos uma aresta entre cada par $u,v \in V(G(n,p))$ de forma aleatória e independente com probabilidade p.

OBS: o $G(n,p)$ ñ é um grafo, mas um espaço de probabilidade.

Ω



Note que um evento nesse espaço corresponde a um conj. de grafos.

Lembre-se que pelo Teorema Binomial, temos

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x,y \in \mathbb{R}$.

Para provar que $G(n,p)$ é um espaço de probabilidade, precisamos mostrar que

$$\sum_{G \in G(n,p)} \mathbb{P}(G) = 1$$

Note que

$$\sum_{G \in G(n,p)} \mathbb{P}(G) = \sum_{G \in G(n,p)} p^{e(G)} \cdot (1-p)^{\binom{n}{2} - e(G)} = \sum_{m=0}^{\binom{n}{2}} \binom{\binom{n}{2}}{m} p^m (1-p)^{1-m} \quad (A)$$

Pelo Teorema Binomial

$$(x+y)^{\binom{n}{2}} = \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} \binom{\binom{n}{2}}{k} x^p y^{1-p} \qquad \text{(B)}$$

Por (A) e (B), e fazendo $x=p$ e $y=(1-p)$, temos que

$$\sum_{m=0}^{\binom{n}{2}} \binom{\binom{n}{2}}{m} p^m (1-p)^{1-m} = (p+(1-p))^{\binom{n}{2}} = 1^{\binom{n}{2}} = 1.$$

Def. Dizemos que um evento em $G(n,p)$ ocorre com <u>alta probabilidade</u> se a probabilidade converge para 1 qndo $n\to\infty$

Teo. Seja $p=p(n)\in(0,1)$. Então

$$\alpha(G(n,p)) < \frac{2\log n}{p}$$

com alta probabilidade.

- Seja $G=G(n,p)$
- Note que a probabilidade de um dado conj. $S\subseteq V(G)$ de tamanho k formar um conj. independente em G é

$$\mathbb{P}(e(G[S])=0) = (1-p)^{\binom{k}{2}}$$

- Logo pela cota da união

$$\mathbb{P}(\alpha(G(n,p))\geq k) = \mathbb{P}\left(\begin{array}{c}G \text{ conter um conj.}\\ \text{independente de}\\ \text{tamanho } k\end{array}\right)$$

se $\alpha(G)\geq k$, então G tem conj ind. de tamanho k

$$\{G\in G(n,p) : \alpha(G)\geq k\} = \left\{G\in G(n,p) : G \text{ contém um conj. independente de tamanho } k\right\}$$

Continuando

$$\mathbb{P}(\alpha(G(n,p)) \geq k) = \mathbb{P}\left(\begin{array}{c} G \text{ conter um conj.} \\ \text{independente de} \\ \text{tamanho } k \end{array}\right)$$

$$\{G \in G(n,p) : e(G[S]) = 0\}$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{S \subseteq V(G) \\ |S| = k}} e(G[S]) = 0 \right)$$

$$\leq \sum_{\substack{S \subseteq V(G) \\ |S| = k}} \mathbb{P}(e(G[S]) = 0)$$

$$= \sum_{\substack{S \subseteq V(G) \\ |S| = k}} (1-p)^{\binom{k}{2}} = \binom{n}{k} (1-p)^{\binom{k}{2}}$$

Moral da História

$$\mathbb{P}(\alpha(G(n,p)) \geq k) \leq \binom{n}{k} (1-p)^{\binom{k}{2}} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k (1-p)^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

$$\leq \left(\frac{en}{k}\right)^k \left(e^{-p}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} = \left(\frac{en}{k}\right)^k \left(e^{-p\frac{(k-1)}{2}}\right)^k$$

$$= \left(\frac{en}{k} \cdot e^{-p\frac{(k-1)}{2}}\right)^k$$

Se $k \geq \frac{2 \log n}{p}$, então

$$\frac{en}{k} e^{-p\frac{(k-1)}{2}} \leq \frac{5}{k}$$

Portanto, $\mathbb{P}(\alpha(G(n,p)) \geq k) \leq \left(\frac{5}{k}\right)^k \to 0$

qndo $n \to \infty$,

Note que $\mathbb{P}(\alpha(G(n,p)) < k) = 1 - \mathbb{P}(\alpha(G(n,p)) \geq k)$ Vale p/ qualquer $k \geq \frac{2\log n}{p}$

$\longrightarrow 1$ qndo $n \to \infty$

Logo $\mathbb{P}\left(\alpha(G(n,p)) < \frac{2\log n}{p}\right) \to 1$ $\square$

Corolário 5.4.3. Seja $p = p(n) \in (0,1)$. Então

$$\chi(G(n,p)) \geq \frac{pn}{2\log n}.$$

com alta probabilidade.

Demo

- Sabemos que $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$
- Aplicando isso ao $G(n,p)$ e usando o teorema anterior, segue

$$\chi(G(n,p)) \geq \frac{n}{\alpha(G(n,p))} \geq \frac{n}{\frac{2\log n}{p}} = \frac{np}{2\log n}$$ $\square$